

Cuadernos de formación



Tema 5. Análisis dinámico

Contenido

Cálculo dinámico	3
El problema de la resonancia	3
El problema sísmico	6
Métodos de análisis	6
Planteamiento general (matriz K, C, U...)	6
Método modal espectral.....	7
Método de superposición modal	11
Método evolutivo o explícito	12
Análisis en el dominio de la frecuencia.....	13
Cálculo fuerzas sísmicas	14
Determinación del espectro de respuesta elástica	14
Determinación del espectro de cálculo	15
Acción sísmica	16
Cálculo dinámicos ferrocarril	20
Velocidades de estudio	20
Superposición modal.....	21
Método evolutivo.....	22
Método de la impronta dinámica	23
Recomendaciones generales estructuras sometidas a efectos dinámicos:.....	26
Longitudes de anclaje.....	26
Fatiga	27
Resonancia	27
Arrostramiento en sismos.....	28
Enlaces.....	28

Cálculo dinámico

Tradicionalmente el cálculo dinámico se había realizado en forma de un coeficiente de impacto, que mayoraba acciones estáticas. Este sistema, que para velocidades pequeñas podía ser fácilmente conservador, no resulta útil ni seguro para velocidades mayores como las que actualmente tienen los trenes de alta velocidad ni para el análisis de sismos. Esta realidad, junto con el avance experimentado por los sistemas computerizados de cálculo ha provocado la generalización de los cálculos dinámicos.

El problema de la resonancia

Dentro de los problemas tratados el más significativo es el de la resonancia. Todo sistema, apartado de su posición de equilibrio realiza oscilaciones alrededor de esta con una serie de modos y periodos de vibración (modos y periodos propios). Si introducimos una perturbación o fuerza que actúe con una de esos periodos se producirá la suma de las amplitudes de las diferentes vibraciones, lo que aumentará progresivamente la amplitud del movimiento y producirá finalmente la quiebra del elemento. En condiciones de resonancia y si los ciclos de carga se mantienen indefinidamente, el coeficiente de impacto puede alcanzar un valor infinito.

Este problema se presenta de forma reiterada en trenes circulando por encima de los 220 km/h pero también se puede presentar frente a cargas de viento o frente al paso de una comitiva en una pasarela peatonal.

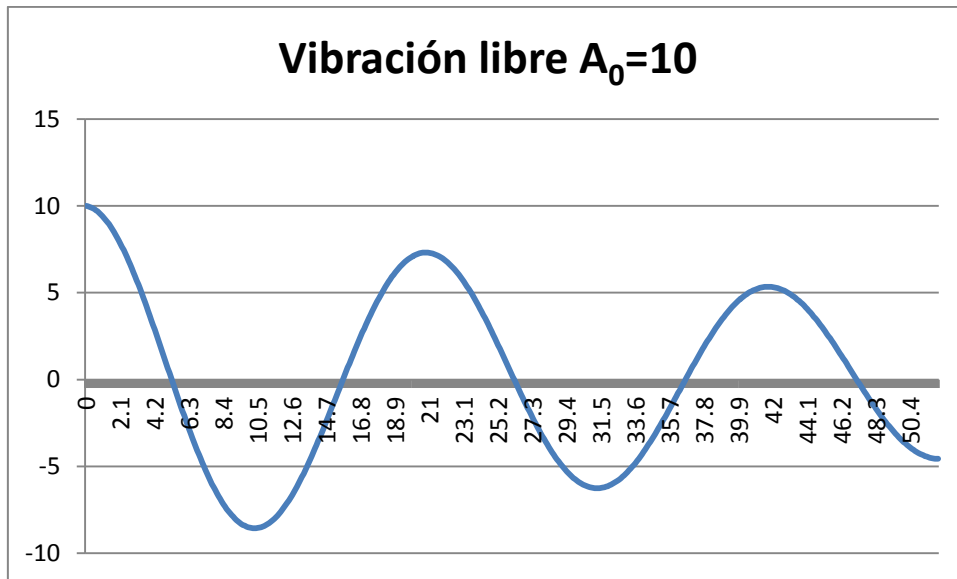
Uno de los casos más publicitados de fallo por resonancia se produjo en el puente de Tacoma, que fue derribado por rachas sucesivas de viento de unos 60 km/h. El viento en si no era muy fuerte pero se aplicaba en ráfagas que entraron en resonancia con la frecuencia de torsión del tablero (era un puente colgante y con un tablero muy flexible) y eso provocó su ruina. En el apartado de enlaces tenéis ese caso y alguno más que demuestran el problema y su extensión.

http://es.wikipedia.org/wiki/Puente_de_Tacoma_Narrows

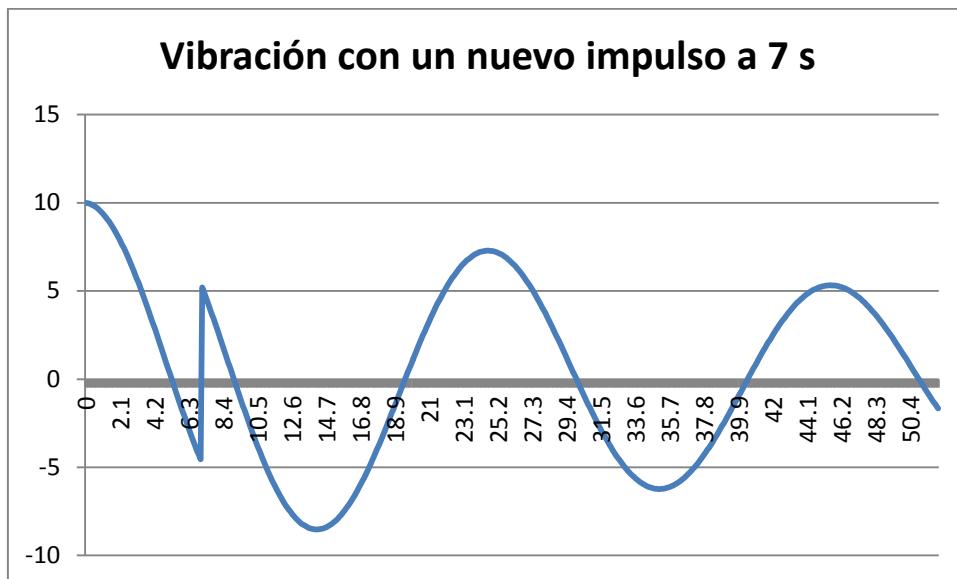
<http://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag>

Desde luego tras el puente de Tacoma los colgantes se construyen con mayor inercia a torsión pero además de ello se hace necesario analizar el valor de este incremento y si realmente se está del lado de la seguridad frente a la resonancia.

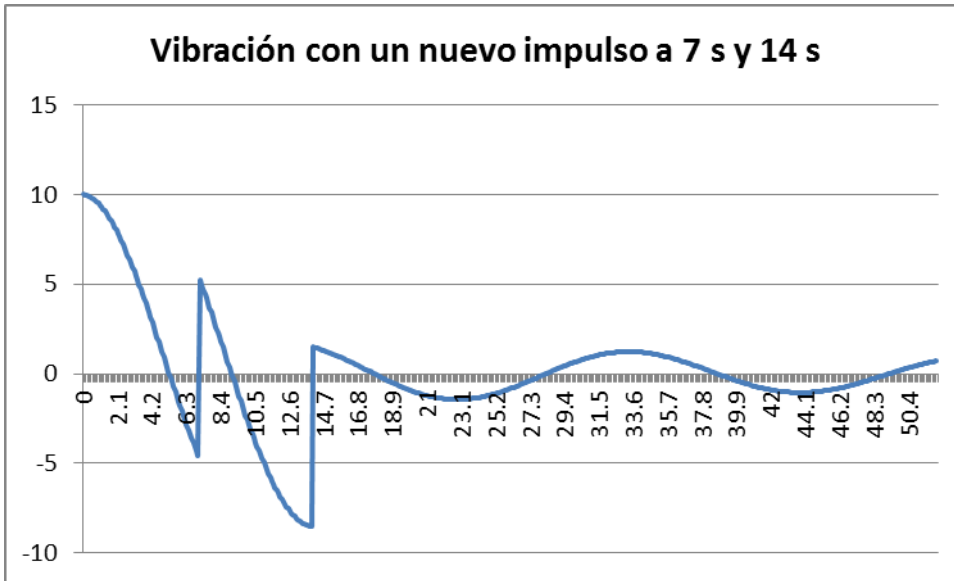
La siguiente secuencia de gráficas muestra el efecto teórico de la resonancia:



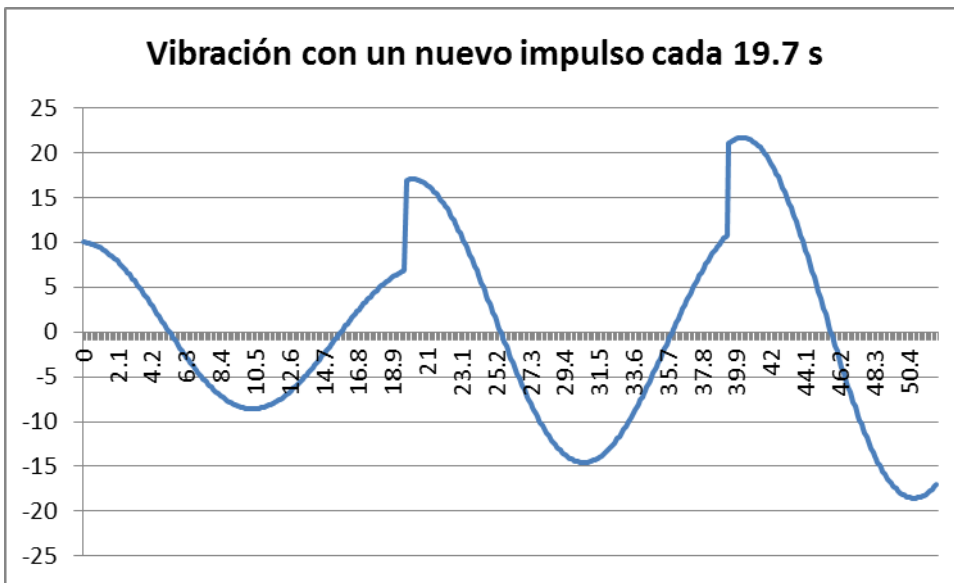
La primera gráfica nos muestra la vibración libre inducida por un desplazamiento inicial de 10 en un sistema de $\omega=0.3$ y amortiguamiento 1.5 %.



La segunda muestra la suma de una primera perturbación de valor 10 en $t=0$ sumada a una segunda perturbación de valor 10 en $t=7$ s. Podemos ver como la gráfica, tras un pequeño quiebro inicial vuelve a tomar la forma que tenía para una perturbación sólo que algo desfasada.



La tercera gráfica nos muestra el efecto de una tercera perturbación igual a las anteriores a los 14 s. Realmente el efecto conjunto es incluso más reducido que en el primer caso, pues los efectos de las diferentes perturbaciones se van compensando.



En esta cuarta imagen vemos lo que ocurre si esas tres mismas perturbaciones las situamos precisamente no cada 7, 9 o 12 s sino precisamente en $2\pi/\omega=19.7$ s. En este caso vemos como las amplitudes se van sumando. A pesar del amortiguamiento la deformación máxima es cada vez mayor, 10 en el primer ciclo, 17 en el segundo, 22 en el tercero... el mantenimiento de esta perturbación actuando cíclicamente sobre la estructura con un periodo igual al propio causa flechas cada vez mayores.

El problema sísmico

Para el tratamiento del sismo es necesario estudiar las fuerzas de inercia generadas al producirse una aceleración en la cimentación de la estructura. El problema en estos casos tiene históricamente dos partes, la primera es determinar cual es la historia de aceleraciones “pésima” dentro de las posibles en una localización determinada, el segundo analizar como estas aceleraciones se transmiten en forma de fuerzas.

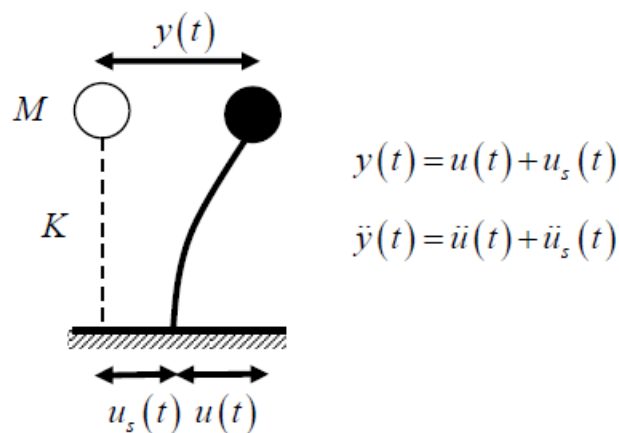
Afortunadamente la primera parte del problema se encuentra en la actualidad solucionado mediante los mapas sísmicos, que determinan las aceleraciones básicas a considerar en una localización para cada periodo de retorno. En España disponemos de un mapa en la NSRC02 que ha sido transcrito en la NSCP07, y en el extranjero estos mapas están disponibles en la normativa de cualquier país con riesgo sísmico mediamente importante.

Métodos de análisis

Planteamiento general (matriz K, C, U...)

El planteamiento del problema dinámico suele realizarse a partir de la generalización y extensión del problema de 1 GDL:

$$K \cdot u(t) + M \cdot \ddot{y}(t) = 0$$



Donde K es la rigidez, m la masa, y el desplazamiento en función del tiempo y u el desplazamiento sobre la posición de equilibrio estático.

Dado que no hay más términos en la ecuación, y que los valores de k y M son positivos los máximos en la misma deben coincidir:

$$\ddot{y}_{\max} = -\omega^2 \cdot u_{\max} \quad \text{siendo } \omega = (K/M)^{0.5}$$

La solución a la ecuación queda de la forma: $Y = u_{\max} \sin(\omega t) + \text{Solución particular}$

Al valor de u_{\max} se le denomina habitualmente desplazamiento espectral y se marca como Sd en lo métodos espectrales.

Al valor de ω se le denomina frecuencia propia y a la forma de deformación adoptada de valor máximo 1 (senoidal en nuestro caso) se la denomina modo propio.

En el caso que el amortiguamiento no sea nulo, como ocurre en la inmensa mayoría de estructuras civiles, la expresión anterior no representa el valor exacto de la aceleración máxima sino sólo una aproximación de ella, ya que además de las fuerzas elásticas $Ku(t)$ coexisten contemporáneamente las fuerzas de amortiguamiento f_d . Para el caso de fuerzas

viscosas lineales resulta: $f_D = C \cdot \dot{u}(t)$. De esta forma, la máxima aceleración absoluta no está rigurosamente dada por la expresión (3), pero de todos modos ésta representa una muy buena aproximación de la máxima aceleración absoluta y_{max} para estructuras civiles en que el amortiguamiento típico es del orden del 5% del crítico. El valor de y_{max} dado para el caso de amortiguamiento diferente de cero se conoce como “Pseudo-aceleración” de la masa, y representa una muy buena aproximación de la aceleración máxima cuando el amortiguamiento es distinto de cero. La pseudo-aceleración se expresa habitualmente con la notación S_a , que en todos los casos está dada por la expresión (ignorando el signo):

$$S_a = \omega^2 \cdot S_d$$

De todos modos, vale la pena destacar que a pesar que la pseudo-aceleración S_a es una aproximación de la máxima aceleración absoluta, la fuerza elástica máxima inducida por el sismo es **exactamente** la dada por la expresión:

$$K \cdot u_{max} = M \cdot S_a$$

Por lo antes expuesto, dado que el análisis sísmico centra su interés en los desplazamientos y esfuerzos máximos, los valores espectrales de desplazamiento S_d , o de pseudo-aceleración S_a pueden utilizarse en forma indistinta con las expresiones anteriores para evaluar los desplazamientos o esfuerzos máximos inducidos por un sismo utilizando expresiones de formato estático; es decir, sin tener que incluir en forma explícita las fuerzas de inercia o de amortiguamiento propias de un problema dinámico. Cuando se utilizan los valores espectrales (S_a y S_d) la dinámica del problema está tenida en cuenta en forma implícita en la dependencia de S_a y S_d en función del período natural (o frecuencia) del sistema considerado.

La generalización de este sistema a n grados de libertad conduce a expresiones semejantes en las que K es la matriz de rigidez, M la de masas y C la de amortiguación, así mismo las cargas pueden representarse como una matriz de aplicación B pre multiplicada por la matriz de masas y las aceleraciones.

Método modal espectral

El método modal espectral es el más usado universalmente en el cálculo de las fuerzas sísmicas, puesto que los espectros sísmicos son fácilmente generalizables y normalizables. Además el método permite determinar espectros “envolventes” que representen la

sismografía de un determinado lugar y evita tener que realizar múltiples combinaciones a partir de cálculos evolutivos sobre múltiples acelerogramas de cálculo.

El método modal espectral requiere como dato de partida para su aplicación conocer los modos y frecuencias naturales del sistema de múltiples grados de libertad, es decir que se conocen los valores de las frecuencias ω_i y de los modos Φ_i , que en el caso de varios GDL corresponden a los autovalores y autovectores de norma 1 del producto de la matriz de rigidez por la inversa de la matriz de masas.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de n grados de libertad dinámicos (n GDL)

para la excitación sísmica son:

$$\underline{K} \cdot \underline{U}(t) + \underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}}(t) + \underline{C} \cdot \dot{\underline{U}}(t) = -\ddot{u}_s(t) \cdot \underline{M} \cdot \underline{B}$$

El vector de carga equivalente a la acción sísmica es el dado en el segundo miembro de la ecuación. Este vector representa la carga dinámica equivalente a la acción dinámica (normalmente sísmica), que debe utilizarse para calcular la respuesta en el tiempo $U(t)$.

EL método modal espectral propone la descomposición modal en la forma:

$$\underline{U}(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \cdot \Phi_i$$

donde $\Phi_i(t)$ es el “desplazamiento generalizado” del modo i.

Substituyendo en la ecuación anterior y premultiplicando ambos miembros por la transpuesta del vector Φ_i , que representa los desplazamientos modales del modo “i”, se obtiene la expresión de la ecuación de equilibrio dinámico del modo “i” en la forma:

$$\Phi_i^T \cdot \underline{K} \cdot \Phi_i \cdot q_i(t) + \Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \Phi_i \cdot \ddot{q}_i(t) + \Phi_i^T \cdot \underline{C} \cdot \Phi_i \cdot \dot{q}_i(t) = -\ddot{u}_s(t) \cdot \Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{B}$$

Introduciendo la notación:

$$\bar{K}_i = \Phi_i^T \cdot \underline{K} \cdot \Phi_i, \quad \bar{M}_i = \Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \Phi_i, \quad y \quad \bar{C}_i = \Phi_i^T \cdot \underline{C} \cdot \Phi_i$$

, y dividiendo ambos miembros de la ecuación por \bar{M}_i se obtiene:

$$\omega_i^2 \cdot q_i(t) + \ddot{q}_i(t) + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i(t) = -\ddot{u}_s(t) \cdot (\Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{B}) / \bar{M}_i$$

Si se compara la ecuación resultante con la correspondiente a la excitación sísmica de un oscilador simple:

$$\omega^2 \cdot u(t) + \ddot{u}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{u}(t) = -\ddot{u}_s(t)$$

Es fácil observar que ambas expresiones comparten la forma, los respectivos valores de $q(t)$ y de $u(t)$, salvo el factor $(\Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{B}) / \bar{M}_i$ que aparece en la ecuación para n GDL y no en la de 1 GDL. Este factor que se expresa:

$$\Gamma_i = (\Phi_i^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{B}) / \bar{M}_i$$

Y se denomina “**factor de participación modal del modo i**”.

De este análisis surge que si se conoce el desplazamiento máximo que ocurre en un sistema de 1 GDL, denominado como S_d , el valor máximo de la coordenada modal respectiva $q_i(t)$, $i, \max q$, será igual al producto

$$q_{i,\max} = \Gamma_i \cdot S_d$$

Por lo tanto, los desplazamientos relativos máximos asociados con el modo i están dados por la expresión:

$$\underline{U}_{i,\max} = q_{i,\max} \cdot \underline{\Phi}_i = \Gamma_i \cdot S_d \cdot \underline{\Phi}_i$$

De manera similar, el vector de pseudo-aceleración $\ddot{U}_{i,\max}$

$$\ddot{U}_{i,\max} = \ddot{q}_{i,\max} \cdot \underline{\Phi}_i = \Gamma_i \cdot S_a \cdot \underline{\Phi}_i$$

La máxima fuerza vendrá determinada por el producto de la pseudo-aceleración por la masa:

$$\underline{P}_{i,eq} = \underline{M} \cdot \ddot{U}_{i,\max}$$

que constituye un vector de cargas tal que, si se calcula la respuesta estática a ellas, se obtiene el desplazamiento máximo en el modo i , vector que se denomina $U_{i,\max}$

$$\underline{P}_{i,eq} = \underline{K} \cdot \underline{U}_{i,\max}$$

De todo lo expuesto surge que el vector de los desplazamientos máximos debidos a la respuesta de un modo puede calcularse en forma exacta a partir del conocimiento de la frecuencia natural del modo ω_i , de su forma modal Φ_i y de la ordenada espectral S_d (o S_a) que es función de la frecuencia natural ω_i (o del período T_i).

Una de las limitaciones inherentes al método modal espectral es que es aplicable a sistemas lineales; es decir, siempre que la estructura se mantenga dentro del campo elástico y de pequeños desplazamientos. Otra limitación importante del método espectral es que sólo da como resultado el valor máximo del desplazamiento de la estructura (o los esfuerzos máximos) pero sin indicar en qué instante del tiempo se produce dicho máximo. Como lo que interesa es el valor máximo de los desplazamientos (o esfuerzos) resultante de la superposición de todos los modos, la falta de simultaneidad de la respuesta máxima en los distintos modos impide que se pueda obtener el valor exacto del máximo de la superposición de todos los modos.

De esta limitación surge la necesidad de realizar ciertas hipótesis sobre cómo sumar los máximos de los distintos modos. Una manera de estimar el máximo de la superposición de todos los modos, que se utiliza con bastante frecuencia en las aplicaciones prácticas del método, consiste en considerar la respuesta en cada modo como estadísticamente independiente de la correspondiente a los restantes modos. Sobre esta base, que es sólo una primera aproximación al problema, se puede justificar que los máximos modales no se suman en forma algebraica directa sino a través de la suma cuadrática (Pitagórica), es decir que el **vector desplazamientos máximos** de todos los modos puede **aproximarse**, para cada componente j , por la expresión:

$$u_{\max}^j \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_{i,\max}^j)^2}$$

Para el cálculo de los esfuerzos (internos y reacciones) máximos combinados de todos los modos utilizando esta hipótesis de independencia estadística de la respuesta en cada modo, es necesario recurrir a las reglas del análisis estático para el vector de fuerzas equivalentes $P_{i,eq}$ de cada modo. Denominando con $E_{i,\max}$ al valor máximo del esfuerzo genérico en un punto de la estructura en el modo i , la superposición de los valores de los distintos modos para obtener una aproximación al máximo de todos los modos está dada por:

$$E_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N (E_{i,\max})^2}$$

El cálculo de las componentes modales de los esfuerzos máximos $i,\max E$ puede realizarse de dos maneras diferentes en el caso de estructuras regulares en altura:

- En función del vector de desplazamientos modales máximos $U_{i,max}$, como es característico en el Método de Rigidez (estático), multiplicando las matrices de rigidez elementales de cada componente por los desplazamientos de los extremos de cada barra contenidos en el vector $U_{i,max}$.
- Por consideraciones estáticas a partir del vector de cargas equivalentes del modo i , $P_{i,eq}$. A los efectos del cálculo manual resulta más simple este procedimiento, aunque los valores resultantes de ambos métodos son idénticos.

La principal condición o limitación a la validez de la respuesta estadísticamente independiente de los modos es que las frecuencias de dichos modos sean *suficientemente* diferentes. En términos generales se tiende a aceptar la hipótesis de independencia estadística cuando las frecuencias de los modos considerados difieren en al menos un 20 o 30 %. Esta condición se cumple en la mayoría de las construcciones de configuración estructural ordenada y simple, independientemente de las dimensiones de la estructura.

Otro aspecto importante se refiere a cuántos modos naturales de vibración es necesario considerar en el cálculo de la respuesta sísmica. En el caso de la norma española se indica que estos deben representar al menos el 90% de la masa de la estructura y definiendo la masa modal como:

$$\mathcal{M}_i = \frac{(\Phi_i^T \cdot M \cdot B)^2}{(\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i)}$$

Método de superposición modal

El método de superposición modal tiene un fundamento similar al método espectral pero para el análisis de las diversas cargas dinámicas en lugar de una envolvente de aceleraciones

Es uno de los métodos generales recomendado por la IAPF para análisis de trenes reales.

El método consiste en sustituir en la ecuación dinámica los desplazamientos $u(t)$ por su valor en función de los modos propios de vibración $[a]$ y de unas funciones $Y(t)$ (coordenadas generalizadas) que serán resultado intermedio del cálculo:

$$\{u\} = [a] \{Y\}_i$$

$$M \{\ddot{u}\} + C \{\dot{u}\} + K \{u\} = \{p(t)\}$$

Suponiendo que los modos de vibración son normales a la matriz de amortiguamiento obtenemos un sistema de n ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\ddot{Y}_i + 2D_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i(t)}{M_i}$$

Donde:

$$P_i(t) = \{a\}_i^T \{p(t)\}$$

$$M_i(\text{masa reducida}) = \{a\}_i^T M \{a\}_i$$

ω_i = frecuencia propia del modo i de vibración.

D_i = razón de amortiguamiento del modo i de vibración.

Estas ecuaciones son desacopladas y por tanto sencillas de resolver tanto analítica (si P(t) es sencilla) como numéricamente en caso contrario. Por otro lado, la solución a la ecuación diferencial será una solución general de la ecuación homogénea (independiente de P y por tanto válida para todos los caso de carga) + una solución particular de la no homogénea (sencilla de determinar numéricamente).

Una vez determinadas las funciones Y podemos calcular las deformaciones y a través de ellas los esfuerzos en todos los puntos de la estructura y para todos los instantes de tiempo.

La contribución de los modos correspondientes a las frecuencias más altas podrá despreciarse, por lo que, al igual que en el método modal espectral, se toman únicamente los términos que movilizan el primer 90% de la masa.

Método evolutivo o explícito

El método evolutivo realiza la integración numérica en el tiempo de las aceleraciones de cada punto. En cada instante la aceleración de un punto esta determinada por su masa, las fuerzas exteriores función del tiempo y las fuerzas interiores, determinadas a partir del estado deformacional del instante anterior. Estas aceleraciones se integran en velocidades y deformaciones y permiten calcular la situación un instante más tarde.

La duración de estos instantes de cálculo depende del método de integración elegido, pero para todos ellos este tiempo debe ser una fracción del periodo propio del elemento de la estructura con menor periodo propio.

El método es muy laborioso y sólo es aplicable con ayuda computacional.

Entre las ventajas de este método destacan:

- Proporciona las soluciones exactas (tanto como un sistema numérico puede obtener) de las aceleraciones y deformaciones en todos los puntos y para todos los instantes.
- Permite emplear no linealidades de cualquier tipo, geométrico, del material, de contacto...siendo el método a emplear cuando estas son significativas.

Como inconvenientes:

- Es computacionalmente costoso, su tiempo de cálculo es muy superior al del método de superposición modal.
- Permite analizar un solo caso de carga por cálculo, debiendo repetirse el cálculo para diferentes acelerogramas o velocidades de paso de la carga.

Análisis en el dominio de la frecuencia

El análisis en el dominio de la frecuencia es un método para evaluar el funcionamiento dinámico frente a diversas cargas a partir del conocimiento de la respuesta frente a cargas dinámicas dadas. Es un método basado en las series de Fourier y empleado fundamentalmente en análisis de señales.

El proceso del método es el siguiente:

- Se determina la “función compleja de respuesta” a partir de la integración rápida de Fourier de las respuestas conocidas. $H(\Omega)$
- Para cada acción dinámica a estudiar, se determina la transformada de Fourier de la acción. $P(\Omega)$.
- La respuesta compleja vendrá dada por $H(\Omega)*P(\Omega)$.
- La respuesta como tal vendrá dada por la transformada inversa de $H(\Omega)*P(\Omega)$

Las transformaciones de Fourier y las transformaciones inversas se realizan por el método rápido de Fourier mientras que la construcción de la función de respuesta compleja se realiza numéricamente a partir de elementos conocidos.

La ventaja de este método son una menor carga numérica que los métodos de integración en el tiempo e incluso que el método de superposición modal y que en caso de encontrarnos no ya frente a una estructura en proyecto sino frente a una estructura construida podemos emplear los datos reales para calibrar la función compleja de respuesta, de manera mucho más sistemática que lo en cualquier otro método.

La desventaja principal es la necesidad de crear la función de respuesta compleja, que debe ser alimentada con datos suficientes y suficientemente contrastados lo que en el caso de no tener la estructura construida exige realizar un cálculo evolutivo o por el modal espectral, lo que hace perder eficacia al método.

La explicación completa de este método se encuentra muy bien documentada en <http://oa.upm.es/9546/>

Es un método tan recientemente desarrollado que no está contemplado en el NSCP07.

Cálculo fuerzas sísmicas

Como ya vimos en el tema de normativa la norma sísmica de construcción de puentes NSCP-07 constituye una segunda parte de la “NSCE-02: Norma Sísmica de construcción, parte general y edificación”, particularizada a los puentes, lo que hace que tenga algunas características diferentes y un mismo planteamiento general.

Puede encontrarse en <http://www.boe.es/boe/dias/2007/06/02/pdfs/A24044-24133.pdf>

El cálculo de las fuerzas sísmicas, como en la normativa de casi todo el mundo y en este caso siguiendo la inspiración de los eurocódigos, se basa en el método modal espectral. Si bien la norma permite también que se realice por otros métodos.

Determinación del espectro de respuesta elástica

El espectro de cálculo viene dado por las siguientes expresiones:

$$0 \leq T \leq T_A: \quad S_a(T) = \left[1 + \frac{T}{T_A} (2,5 v - 1) \right] a_c$$

$$T_A \leq T \leq T_B: \quad S_a(T) = 2,5 v a_c$$

$$T_B \leq T \leq T_C: \quad S_a(T) = 2,5 v \frac{T_B}{T} a_c$$

$$T_C \leq T: \quad S_a(T) = 2,5 v \frac{T_B T_C}{T^2} a_c$$

Con $v=(5/\xi)^{0.4}$ y ξ el amortiguamiento considerado en tanto por ciento:

Tipo de estructura	Bajo la acción del sismo frecuente de cálculo	Bajo la acción del sismo último de cálculo
Puentes de acero Puentes de hormigón pretensado Puentes mixtos	2	4
Puentes de hormigón armado	3	5

Los valores de los tiempos que limitan el espectro son:

Sismo último de cálculo	Sismo frecuente de cálculo Sismo de construcción
$T_A = K C / 10$ $T_B = K C / 2,5$ $T_C = K (2 + C)$	$T_A = K C / 20$ $T_B = K C / 5$ $T_C = K (1 + 0,5 C)$

Donde C es el coeficiente del terreno y K el de contribución de la falla Azores Gibraltar antes descrito.

Frente al espectro considerado normalmente en edificación, este tiene un pico algo superior ($2.5 \xi A_c$ en lugar $2.5 A_c$) y la curva de descenso es ligeramente más rápida.

El espectro de cálculo vertical se obtiene multiplicando el horizontal por 0.7.

Determinación del espectro de cálculo

El espectro de cálculo se determinará dividiendo el espectro de respuesta elástica por el factor de comportamiento: $S_d = S_a / q$

En el caso de esperar comportamiento elástico el factor de comportamiento vale 1, mientras que si se considera comportamiento dúctil su valor viene dado por la siguiente tabla:

TIPO DE ELEMENTO DÚCTIL	Tipo de comportamiento	
	Ductilidad limitada	Dúctil
Pilas de hormigón armado: Pilas verticales trabajando a flexión ⁽¹⁾ Pilas inclinadas trabajando a flexión	1,5 1,2	3,5 $\lambda(\alpha_s)$ 2,1 $\lambda(\alpha_s)$
Pilas de acero Pilas verticales trabajando a flexión Pilas inclinadas trabajando a flexión Pilas con arriostramientos centrados Pilas con arriostramientos descentrados ⁽²⁾	1,5 1,2 1,5 -	3,5 2,0 2,5 3,5
Estribos rígidamente unidos al tablero En general Marcos encajados en el terreno	1,5 1,0	1,5 1,0
Arcos	1,2	2,0
⁽¹⁾ $\alpha_s = L / h$ es el índice de cortante de la pila, siendo L la distancia desde la rótula plástica hasta el punto de momento nulo y h el canto de la sección transversal Si $\alpha_s \geq 3$ $\lambda(\alpha_s) = 1$ Si $1 \leq \alpha_s < 3$ $\lambda(\alpha_s) = \sqrt{\frac{\alpha_s}{3}}$		
⁽²⁾ Esta tipología estructural sólo está indicada cuando se desee un tipo de comportamiento dúctil		

Acción sísmica

La acción sísmica se determinará mediante cálculo modal espectral superponiendo el espectro de cálculo y los modos y frecuencias propias de la estructura.

El procedimiento completo será el siguiente:

Determinación de las matrices de Masa M y rigidez K.

Determinación de los autovectores y autovalores (modos y frecuencias propias de la estructura) de la matriz $[K \cdot M^{-1}]$.

Determinación de los espectros de cálculo horizontal y vertical tal y como se ha descrito en los apartados anteriores.

Determinación del número de frecuencias propias necesario, de manera que la suma de masas movilizadas sea superior al 90% del total.

$$M_i = \frac{(\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i)^2}{(\Phi_i^T \cdot M \cdot \Phi_i)}$$

Para cada una de estas frecuencias propias la respuesta máxima vendrá dada por:

$$U_{i,\max} = q_{i,\max} \cdot \Phi_i = \Gamma_i \cdot S_d \cdot \Phi_i$$

$$\ddot{U}_{i,\max}^s = \ddot{q}_{i,\max} \cdot \Phi_i = \Gamma_i \cdot S_a \cdot \Phi_i$$

$$P_{i,\text{eq}} = M_i \cdot \ddot{U}_{i,\max}^s$$

Y se considerará como valor máximo para el movimiento conjunto:

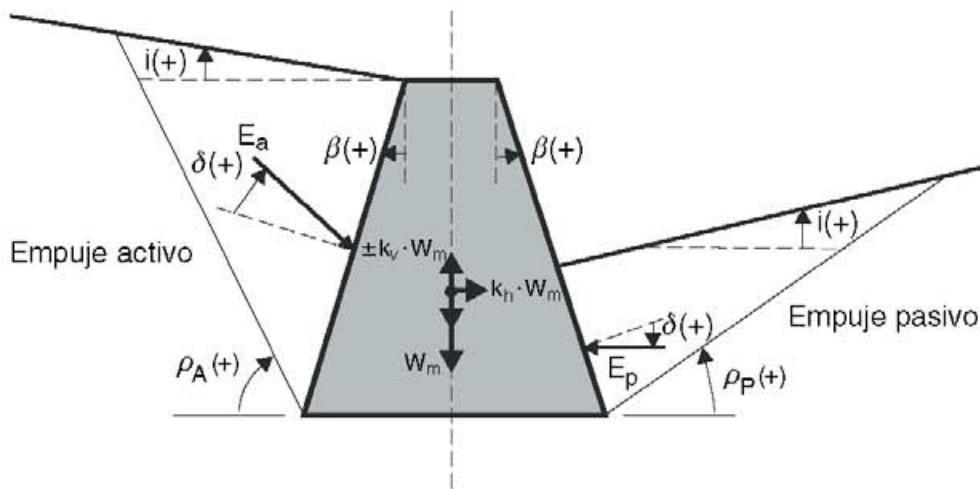
$$E_{\max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N (E_{i,\max})^2}$$

Esto proceso se repetirá suponiendo el sismo con dirección trasversal, longitudinal y vertical y estableciendo la combinación de cada uno de ellos con el 30% de los otros dos.

Método de Monoboe. Consideración del empuje de tierras

Para el dimensionamiento de muros la NSCP07 establece que puede emplearse el método de Mononoe-Okabe. Este método asume los métodos habituales de dimensionamiento de tierras mediante coeficientes de empuje y los modifica teniendo en cuenta la aceleración sísmica y las fuerzas de inercias que aparecen.

El diagrama de fuerzas movilizadas es el siguiente:



Donde E_a y E_p son los empujes pasivo y activo y ϕ y δ el ángulo de rozamiento interno del terreno y el ángulo de rozamiento terreno muro ($2/3\phi$ normalmente).

Los ángulos de movilización de las cuñas resultantes son los siguientes:

$$\rho_A = \phi - \theta + \arctg \left[\frac{C_1 - \operatorname{tg}(\phi - \theta - i)}{C_2} \right]$$

$$C_1 = \sqrt{\operatorname{tg}(\phi - \theta - i) [\operatorname{tg}(\phi - \theta - i) + \operatorname{ctg}(\phi - \theta - \beta)] [1 + \operatorname{tg}(\delta + \theta + \beta) \operatorname{ctg}(\phi - \theta - \beta)]}$$

$$C_2 = 1 + \{ \operatorname{tg}(\delta + \theta + \beta) [\operatorname{tg}(\phi - \theta - i) + \operatorname{ctg}(\phi - \theta - \beta)] \}$$

$$\rho_P = \theta - \phi + \arctg \left[\frac{C_3 + \operatorname{tg}(\phi + \theta + i)}{C_4} \right]$$

$$C_3 = \sqrt{\operatorname{tg}(\phi - \theta + i) [\operatorname{tg}(\phi - \theta + i) + \operatorname{ctg}(\phi - \theta + \beta)] [1 + \operatorname{tg}(\delta + \theta - \beta) \operatorname{ctg}(\phi - \theta + \beta)]}$$

$$C_4 = 1 + \{ \operatorname{tg}(\delta + \theta - \beta) [\operatorname{tg}(\phi - \theta + i) + \operatorname{ctg}(\phi - \theta + \beta)] \}$$

Donde θ es el ángulo aparente de la gravedad (afectada por el sismo):

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{k_h}{1 \pm k_v} \right)$$

$$k_h = \frac{a_c}{g} \quad \text{salvo que justifique un valor inferior que nunca será inferior a la mitad de este.}$$

$$k_v = \pm \frac{k_h}{2}$$

Con esta formulación el valor de los empujes queda exactamente igual a la clásica:

$$E_{AD} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{AD}$$

$$E_{PD} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{PD}$$

Con los siguientes coeficientes de empuje:

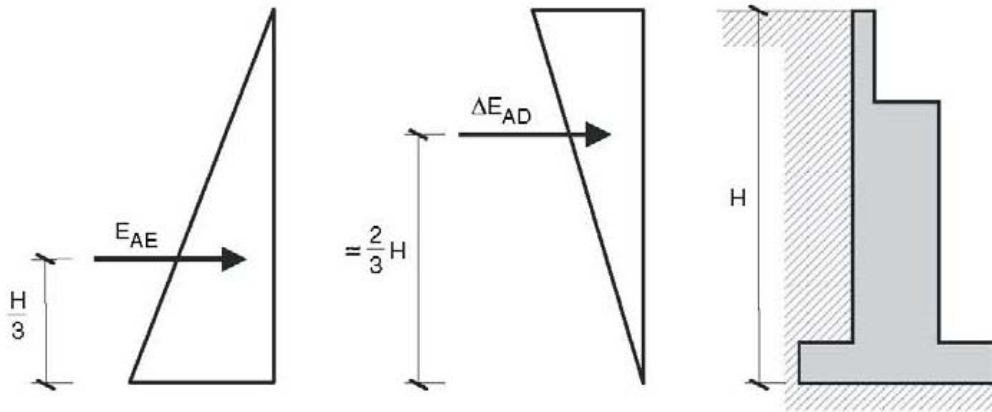
$$K_{AD} = \frac{(1 \pm k_v) \cos^2 (\phi - \beta - \theta)}{\cos \theta \cos^2 \beta \cos(\delta + \beta + \theta) \left[1 + \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\phi + \delta) \operatorname{sen}(\phi - i - \theta)}{\cos(\delta + \beta + \theta) \cos(i - \beta)}} \right]^2}$$

$$K_{PD} = \frac{(1 \pm k_v) \cos^2 (\phi + \beta - \theta)}{\cos \theta \cos^2 \beta \cos(\delta - \beta + \theta) \left[1 - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\phi + \delta) \operatorname{sen}(\phi + i - \theta)}{\cos(\delta - \beta + \theta) \cos(i - \beta)}} \right]^2}$$

No obstante, a diferencia del caso estático, no es posible determinar con facilidad el punto de aplicación de este empuje. LA NSCP07 recomienda en este caso colocar esta resultante del empuje dinámico a $2/3H$ de la base del muro, o que es equivalente a una distribución de presiones triangular invertida, con valor nulo en la base y máximo en superficie. Esta distribución se sumaría a la estática convencional:

$$\Delta E_{AD} = \frac{1}{2} \gamma H^2 (K_{AD} - K_{AE})$$

$$E_{AT} = E_{AE} + \Delta E_{AD}$$



En el caso de existir presencia de agua al empuje estático de esta se le deberá añadir el hidrodinámico:

$$E_{WD} = \frac{7}{12} k_h \gamma_w H_w^2$$

Cálculo dinámicos ferrocarril

Tal y como vimos en el tema de normativa la IAPF-07 indica diferentes métodos a aplicar en función de la complejidad:

- Cálculo estático y coeficiente dinámico envolvente
- Coeficientes de impacto para trenes reales
 - Obtención mediante expresiones analíticas
 - Obtención mediante cálculo dinámico con trenes reales
- Cálculo estático con coeficiente de impacto envolvente extendido a otras estructuras no resonantes. (isostáticos no esviados y marcos bajo terraplén)
- Cálculo dinámico mediante integración directa con cargas móviles
- Cálculo dinámico simplificado mediante impronta dinámica del tren. (sólo válido para estructuras isostáticas).

Los cálculos por el procedimiento de impacto envolvente son realmente cálculos estáticos que ya se vieron en el tema de normativa. En este apartado vamos a centrarnos en el resto de elementos.

El apartado de “cálculo estático con coeficiente de impacto envolvente extendido” en realidad reitera la validez del método de coeficiente envolvente para algunos casos más (marcos enterrados y vanos isostáticos).

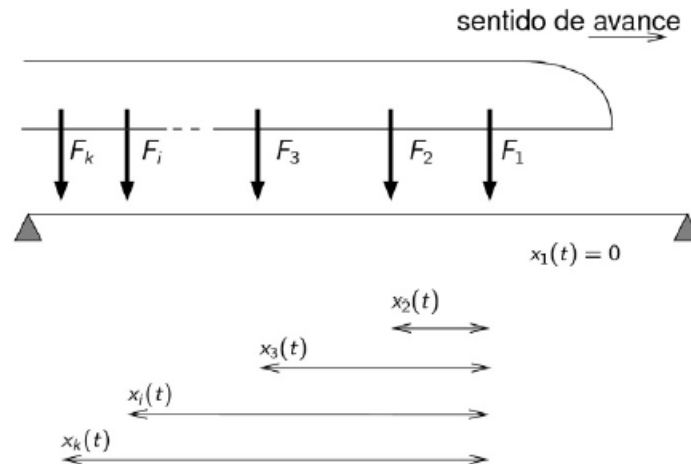
Los cálculos dinámicos con trenes reales y los de integración directa se plantean en la norma con dos métodos distintos: Superposición modal y cálculo evolutivo.

Velocidades de estudio

La IAPF07 indica en su apartado B.2.2.3 que se deben estudiar “las distintas velocidades de paso entre 20 km/h y V_{max} ” esto ha sido muy comentado en diversos foros apareciendo las siguientes conclusiones:

- Se debe considerar una velocidad algo mayor a la prevista: $1.2 V_{max}$
- No se debe hacer un muestro uniforme ni aleatorio entre estas velocidades (por ejemplo para todas las velocidades múltiplo de 10 km/h) sino centrarse en las velocidades que se encuentren próximas a la resonancia del tren.

La resonancia del tren vendrá definida por la frecuencia propia de la estructura y la longitud entre ejes del tren. Si el tren discurre a una velocidad de S/T donde S es la separación entre ejes del tren (longitud del vagón) y T el primer periodo propio de flexión de la estructura se generaran efectos resonantes con seguridad, por lo que las velocidades en torno a este valor deben ser estudiadas con mucha más atención que las demás. La limitación a este efecto resonante (que permite que los puentes no se derrumben cuando el tren pasa a esta velocidad) vendrán dadas por la longitud total del tren (finita, por lo que el efecto amplificador parará en algún momento) y la disposición de cargas a diferentes longitudes (la locomotora y el vagón comedor suelen ser de diferente longitud al resto)



Superposición modal

El método de superposición modal se basa en el método general de superposición modal descrito anteriormente.

- Se calculan los modos y periodos propios de la estructura.
- Se determina el número de modos necesario, asumiendo que deben movilizar un 90% de la masa.
- Para cada modo se soluciona la ecuación dinámica desacoplada para una estructura de masa por unidad de longitud $r(x)$, rigidez $EI(x)$ y modos propios ϕ_i :

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = \phi_i(vt) F$$

Donde:

$$M_i = \int_0^L \rho(x) \phi_i^2(x) dx \quad (i\text{-ésima masa generalizada})$$

$$K_i = \int_0^L \phi_i''(x) EI(x) \phi_i''(x) dx = M_i \omega_i^2 \quad (i\text{-ésima rigidez generalizada})$$

$$\eta_i(t) = \phi_i(vt) F \quad (i\text{-ésima carga generalizada})$$

$$C_i = 2\zeta_i \omega_i M_i$$

Y donde F es una carga aislada circulando a velocidad v por la estructura. En el caso habitual de varias cargas (un tren) se considerará $\phi(vt)F + \phi(vt-x_1)F_1 + \phi(vt-x_2)F_2 + \dots$ siendo F_i las cargas y x_i su distancia respecto a la primera carga.

La suma de las soluciones Y_i representa el desplazamiento en cada instante de cada punto de la estructura, lo que permite determinar las aceleraciones (\ddot{y}) y los esfuerzos (proporcionales a Y_{max}).

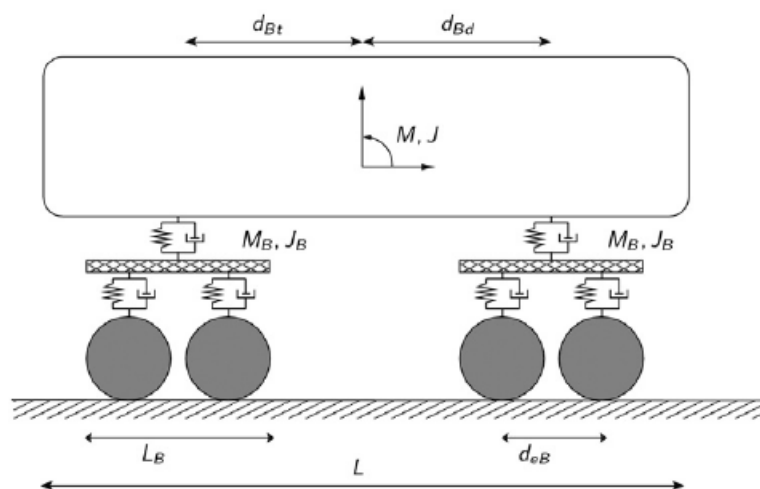
Tanto en este método como en el evolutivo y en el de impronta dinámica debe repetirse el cálculo para cada tren y en todo el rango de velocidades de paso, obteniendo un coeficiente de impacto para cada tren, que servirá para mayorar la respuesta estática respecto a ese tren, realizándose el dimensionamiento para los mayores esfuerzos obtenidos de esta manera. Es importante indicar que no se tomará el mayor de los coeficientes de impacto y se mayoraran por el todos los trenes, pues este sistema queda demasiado del lado de la seguridad, dado que los trenes que realmente presentan coeficientes de impacto elevados (entre 2 y 4) son generalmente trenes de pasajeros con cargas por eje muy reducidas (8t) y por tanto su efecto global es similar al de los trenes de mercancías (22 t por eje) con coeficiente de impacto generalmente mas reducidos (1.2-1.4).

Método evolutivo

El método evolutivo se implementa directamente con el método general evolutivo en cualquier programa de elementos finitos que lo contenga (Abaqus, simulik) y puede ser empleada para cualquier estructura, independientemente de su configuración o velocidad de paso para estudiar el tránsito convencional sin considerar la interacción vehículo estructura.

LA IAPF incluso permite que bajo autorización de la Administración se emplee este método incluyendo la interacción vehículo estructura. En el este caso deberán, en lugar de simularse las cargas por eje, incluirse un modelo del vehículo con sus masas y sus suspensiones (dotadas del correspondiente amortiguador y su muelle)

El modelo completo queda como sigue:



Este modelo podrá también simplificarse con la correspondiente autorización, si bien una vez que realizamos un modelo de esta complejidad lo usual es realizarlo completo.

Método de la impronta dinámica

El método de la impronta dinámica se basa en el análisis de las vibraciones libres producidas en puentes isostáticos tras el paso de cada eje, a partir de curvas analíticas que no exigen la resolución en el tiempo del cálculo dinámico de la estructura.

El método es aplicable a cualquier estructura isostática, sea cual sea su masa, frecuencia o velocidad de uso, si bien no analiza la interacción vehículo estructura.

Si bien su aplicación práctica está muy limitada por la condición de isostaticidad, lo cierto es que resulta conceptualmente muy útil.

Se definen en el método los siguientes parámetros:

M : Masa total del vano del puente.

L : Longitud del vano del puente.

f_0 : Primera frecuencia propia de flexión del puente.

ζ : Tasa de amortiguamiento estructural del puente.

v : Velocidad de paso del tren.

$\lambda = v/f_0$: Longitud de onda de la excitación.

$K = \lambda/2L$: Parámetro adimensional.

Con estos parámetros se construyen tres funciones:

$$C_i = \frac{2}{M}$$

$$A(K) = \frac{K}{1-K^2} \sqrt{e^{-2\zeta\frac{\pi}{K}} + 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{K}\right)e^{-\zeta\frac{\pi}{K}}}$$

$$G(\lambda) = \max_{k=1}^n \sqrt{\left[\sum_{i=1}^k F_i \cos(2\pi\delta_i) e^{-2\pi\zeta\delta_i}\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^k F_i \text{sen}(2\pi\delta_i) e^{-2\pi\zeta\delta_i}\right]^2}$$

$$\delta_i = (x_k - x_i)/\lambda$$

x_i : : Distancia del eje i al primer eje de la composición (figura B.12)

k : Índice que indica la longitud del subtren, a variar entre 1 y n (último eje de la composición)

Con estas funciones puede calcularse la aceleración máxima directamente:

$$\Gamma = C_r \cdot A(K) \cdot G(\lambda)$$

Posteriormente se pueden calcular amplitudes a partir de la relación del espectro: $a_{max} = \omega^2 \cdot \text{amplitud máxima}$.

El término $G(\lambda)$, aparte de λ depende sólo del tren y del amortiguamiento, y se le denomina impronta dinámica del tren. Marca para qué longitudes de onda se producen resonancias con la estructura.

La siguiente figura, extraída de la IAPF07, nos muestra la impronta dinámica del ICE2, podemos ver como se producen picos de resonancia para longitudes de 7 m, 9 m y 27 m y como estos son mayores a menor amortiguamiento pero se producen en los mismos puntos.

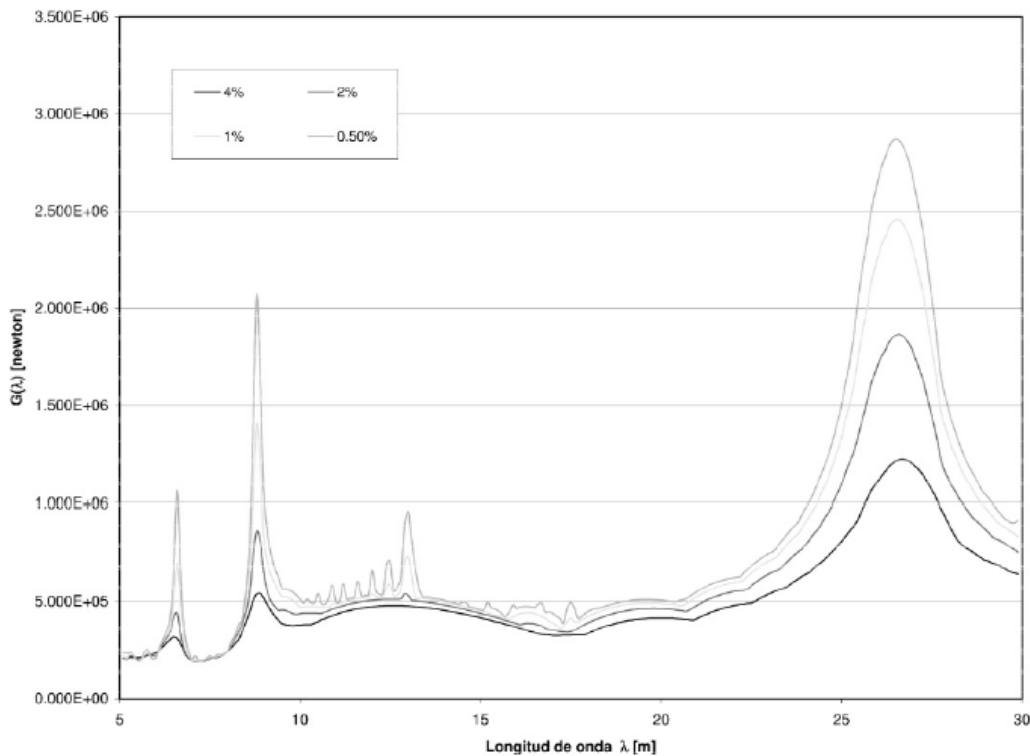


Figura B.13: Impronta dinámica del tren ICE2 según distintos valores del índice de amortiguamiento

Al término $A(k)$ se le denomina línea de influencia dinámica y depende del puente (de su frecuencia, de su longitud, de su amortiguamiento) y de la velocidad de paso, mostrando para que valores de k y por tanto para que velocidades de paso o longitudes de onda se producen los mayores efectos. La siguiente figura, tomada igualmente de la IAPF07 nos muestra una línea de influencia dinámica:

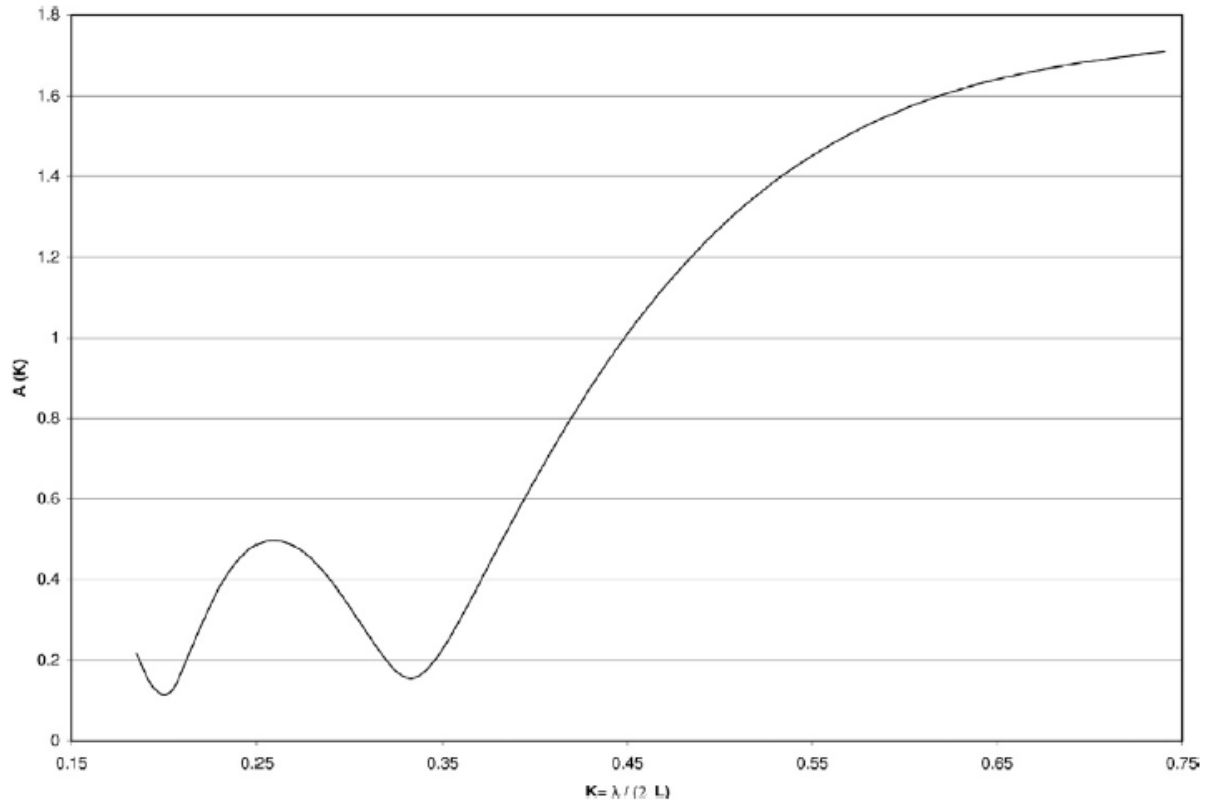
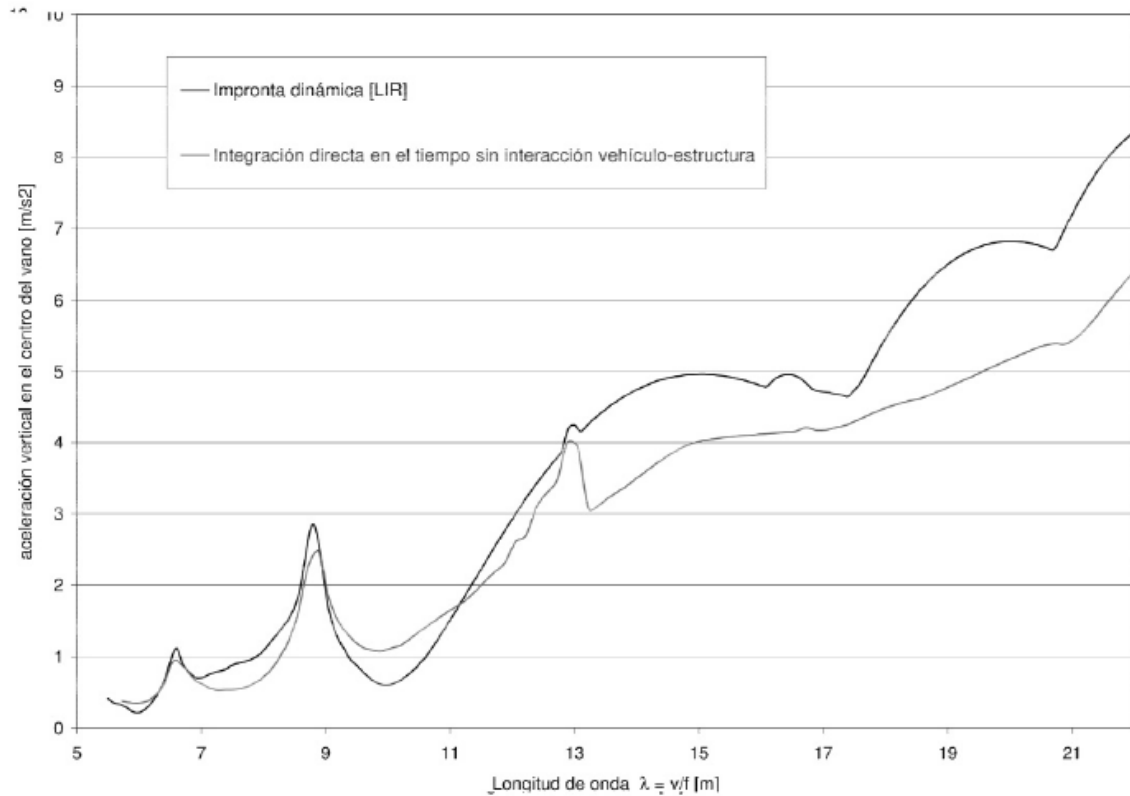


Figura B.14: Línea de influencia dinámica, $A(K)$, para el puente tipo: $L = 15m$; $\zeta = 2\%$

Podemos ver como hay un máximo efecto relativo para $k=0.27$ y una progresión continua del valor a partir de 0.35 .

El producto de estas dos curvas por C (que no deja de ser una constante $C=2/M$ para cada estructura) nos dan las aceleraciones máximas para cada velocidad de paso:



En esta nueva figura podemos ver la comparación entre el método de impronta dinámica y un cálculo evolutivo. Los valores máximos relativos son reflejados con fidelidad en ambos términos, mientras que los valores a partir de $\lambda = 13$ muestran una sobreconsideración de los efectos dinámicos en el método de la impronta.

Recomendaciones generales estructuras sometidas a efectos dinámicos:

Se incluyen aquí recomendaciones generales u observaciones de diseños específicos de las estructuras sometidas a cargas dinámicas.

Longitudes de anclaje

En las estructuras sometidas a efectos dinámicos debe cuidarse especialmente el anclaje y solape de armaduras, así como los detalles de en nudos.

La EHE08 en su artículo 69.5.1.1 indica que como norma general la longitud de anclaje de una barra sometida a efectos dinámicos será la correspondiente a su posición aumentada en 10ϕ .

Fatiga

Los efectos dinámicos, sobre todo los asociados a las cargas ferroviarias, generan una gran cantidad de ciclos de carga y descarga en niveles altos de tensión. Es muy posible que el paso de un tren real provoque tantos ciclos de carga como vagones lleva (entre 11 y 28), estos ciclos se producen sobre un nivel de tensiones elevado (pues la presencia del tren hace que toda la estructura este cargada) y por ello se hace necesario estudiar el comportamiento frente a fatiga de la estructura.

Esta necesidad de soportar fatiga perjudica a aquellas tipologías que trabajan empleando tracciones en sus elementos (estructuras metálicas y mixtas) mientras que tienen un efecto mucho menor en las estructuras pretensadas, donde el hormigón se encuentra comprimido frente a las cargas de servicio y la carrera de tensiones en el acero es reducida dado el gran área de hormigón que colabora en la descompresión.

Resonancia

Como regla general, para evitar fenómenos de resonancia dinámica, la mejor solución es aumentar la rigidez. Por ello en las estructuras sometidas a efectos dinámicos no se debe apurar en ningún caso la esbeltez o las proporciones de cantos.

Arrostramiento en sismos

Del mismo modo que la rigidez general reduce los problemas de resonancia, el arrostramiento entre elementos verticales reduce los problemas frente a sismo. Puesto que en obra civil no suele ser posible arrostrar las pilas con otro elemento que no sea el tablero debe plantearse en el diseño de los aparatos de apoyo la posibilidad de que el tablero pueda funcionar como elemento arriostrante en pilas de gran altura.

Enlaces

A continuación os enumero algunos enlaces interesantes sobre este tema, por si queréis ampliar conocimientos:

- Fundamentos del análisis dinámico de estructuras:<http://es.scribd.com/doc/18103067/Fundamentos-Del-Analisis-Dinamico-de-Estructuras>
- Análisis en el dominio de la frecuencia: Hay un trabajo de investigación muy riguroso de la UPM sobre este tema: <http://oa.upm.es/9546/>
- Método de superposición modal:
<http://www.espe.edu.ec/portal/files/libros/sismico/capitulo12.pdf>
- Puente de Tacoma: Este puente se hizo famoso por su derrumbe, debido a ráfagas de viento resonantes con el modo de vibración torsional del tablero. Se produjo un efecto resonante que fue amplificando los movimientos estáticos del puente durante horas hasta que se produjo el derrumbe. Hay cantidad de notas e incluso vídeos en internet aunque la información de Wikipedia es un punto de partida para el que quiera saber más. http://es.wikipedia.org/wiki/Puente_de_Tacoma_Narrows
- El puente de Volgogrado: a pesar de que todos deberíamos haber tomado buena nota de los problemas del puente de Tacoma estos se repiten en puentes más modernos: <http://actualidad.rt.com/actualidad/view/11896-El-viento-meci%C3%B3-puente-del-Volgogrado-como-columpio>
- Arcos del alconetar: un caso de resonancia en arcos en construcción:
http://naukas.com/2012/06/15/la-resonancia-bien-entendida-ii-el-puente-arcos-de-alconetar/?goback=%252Egde_3709210_member_124780151

Anexo: Determinación de las frecuencias y periodos propios

Si bien en el texto hemos dado por sobreentendido el conocimiento de los significados de las frecuencias y periodos propios de la estructura se incluye este apartado como recordatorio del mismo.

En ausencia de amortiguamiento la ecuación que rige el comportamiento dinámico de un elemento es:

$$K u + M \ddot{u} = F(t)$$

Donde K es la matriz de rigidez, M la de masas, F el vector de fuerzas aplicadas y u(t) el vector de desplazamiento de cada nodo en función del tiempo.

Esta ecuación diferencial tendrá un resultado:

$$U(t) = \sum A_i \text{sen}(w_i t) + B(t)$$

Donde B es una solución particular para la ecuación no homogénea y A_i son las soluciones generales de la ecuación homogénea. Cada A_i es un vector de movimientos modales y hay tantos A_i como ecuaciones en el sistema y por tanto tantos A_i linealmente independientes como número de gdl tenga el sistema:

$$K u + M \ddot{u} = 0 \rightarrow$$

$$K (\sum A_i \text{sen}(w_i t)) - M w_i^2 (\sum A_i \text{sen}(w_i t)) = 0 \rightarrow$$

Por ser linealmente independientes: $(K - w_i^2 M) A_i = 0 \rightarrow$

$$(M^{-1} K - w_i^2 I) A_i = 0$$

con I la matriz unidad

\rightarrow los w_i son las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz $(M^{-1}K)$ y A_i los autovectores asociados.

Las soluciones de deformación tendrán la forma de suma de estos modos de vibración, que al ser las soluciones de la ecuación homogénea son las formas en las que vibra la estructura libre de fuerzas.